Pojistné v životním pojištění

Obecné principy

Pojistné v životním pojištění se obvykle počítá na základě takzvaného principu ekvivalence, kdy se předpokládá rovnost mezi střední hodnotou plateb pojišťovny klientovi a klienta pojišťovně. V prvé řadě se tento vztah aplikuje pouze na hodnotu plateb bezprostředně souvisejících s pojistným plněním – nezapočítává se zisk pojišťovny, risikové přirážky ani žádné správní náklady – a hovoří se o tak zvaném *nettopojistném*, následně se úvahy rozšíří i o další možné skutečnosti a výsledkem je *bruttopojistné*.

Risikové přirážky (především se jedná o přirážky za zdravotní stav, výjimečně za povolání, oblast, ve které se klient nachází, a podobně) se do pojistného promítají dvěma způsoby:

- prostřednictvím zvýšení (snížení) pravděpodobnosti úmrtí. Hodnoty pravděpodobností q_x se mohou zvyšovat multiplikativně (tak je tomu u většiny chorob a zdravotních poruch) nebo aditivně (zejména v případě pooperačních stavů), a to buď po celou dobu trvání pojištění nebo pouze po její část;
- prostřednictvím multiplikativních či aditivních přirážek k nettopojistnému získanému standardní cestou (tedy na základě nemodifikovaných úmrtnostních tabulek).

Přirážky by měly být udělovány za základě předem stanoveného systému, přijatého již před oceněním prvního klienta. (Byť je samozřejmě možné upravit přirážkový systém podle napozorovaného škodního průběhu.)

V případě, že se hledá pojistné, které má být zaplaceno jednorázově, je zřejmé, že se bude rovnat střední hodnotě počáteční hodnoty veškerých plateb pojišťovny klientovi. V případě, že se má jednat o pojištění, jehož pojistné je rozděleno aspoň do dvou splátek, hovoří se o tak zvaném pojištění s běžně placeným pojistným. Pro výpočet je potom nutno uvažovat i se střední hodnotou počáteční hodnoty veškerých plateb klienta pojišťovně.

Zásadním předpokladem pro kalkulaci pojistného je kalkulační krok. Tento předpoklad je zásadní z pohledu plateb, neboť veškeré platby jsou činěny vždy na počátku, na konci nebo v polovině kalkulačního odbobí, a risika, jelikož během celého kalkulačního období jsou hodnoty jednotlivých parametrů výpočtu a risikových faktorů (především úmrtnosti) dané a nezávisí na menších časových intervalech. Obvykle se předpokládá roční kalkulační krok; tak tomu bude i v následujícím textu (není-li uvedeno jinak).

Způsob výpočtu

V životním pojištění se lze setkat se třemi základními způsoby stanovování pojistného, kterými jsou

- deterministický přístup;
- pravděpodobnostní přístup;
- využití finančních modelů.

Obecně lze tvrdit, že všechny přístupy jsou navzájem ekvivalentní a při stejných vstupních předpokladech dávají stejné výsledky, odlišuje je pouze image: deterministický přístup je klasický, operuje s primitivními pojmy a lze ho užít k názorné presentaci pro ty, kteří se s matematikou ani nepotýkají, pravděpodobnostní přístup si hraje na matematiku a využití finančních modelů se tváří jako progresivní metoda, která však zpravidla využívá velmi drahé počítačové programy neprůhledně využívající pravděpodobnostní přístup; v následujícím textu nebude diskutován.

V případě deterministického přístupu je pro odvození použita velká homogenní skupina klientů. Na základě úmrtnostních tabulek se stanoví hodnoty počtu žijících v jednotlivých letech a od nich se odvodí počáteční hodnoty plateb pojišťovny klientovi a klienta pojišťovně.

V případě pravděpodobnostního přístupu se definuje náhodná veličina, která nabývá v každém roce hodnoty, která je rovna výši platby pojišťovny klientovi, popřípadě náhodná veličina, která nabývá v každém roce hodnoty, která je rovna výši platby klienta pojišťovně. Z nich se odvodí počáteční hodnoty plateb pojišťovny klientovi a klienta pojišťovně jako střední hodnoty součtu plateb pojišťovny klientovi (v případě jednorázově placených pojištění) nebo jako podílu střední hodnoty součtu plateb pojišťovny klientovi a střední hodnoty součtu jednotkových plateb klienta pojišťovně. Jejich pravděpodobnostní rozložení se odhaduje pomocí hodnot z úmrtnostní tabulky.

Nettopojistné základních jednorázově placených veličin

Smrt

Hledáme hodnotu nettopojistného, které by bylo třeba jednorázově zaplatit za pojištění pro případ smrti na pojistnou částku na dobu n let, která má po celou dobu trvání pojištění konstantní výši K, přičemž tato částka se vyplácí na konci (pojistného) roku, ve kterém došlo k úmrtí klienta. Výši pojistného označíme symbolem P.

V případě deterministického odvození jednorázového nettopojistného pojištění pro případ smrti předpokládáme existenci skupiny l_x osob – klientů pojišťovny, kteří mají stejný věk, stejné pohlaví a srovnatelný zdravotní stav. Hodnota l_x je dostatečně velká, aby nebylo třeba činit úvahy o vlivu zaokrouhlování popřípadě definovat neceléhoo člověka. Z těchto osob, v souladu s úmrtnostními tabulkami, na počátku následujícího roku bude žít již pouze l_{x+1} lidí, na počátku dalšího roku l_{x+2} lidí a tak dále. Počáteční hodnotu plateb všech klientů pojišťovně lze vyjádřit jako

$$P \cdot l_x ,$$

počáteční hodnotu plateb pojišťovny všem klientům lze vyjádřit jako

$$K\left(l_x - l_{x+1}\right)v + K\left(l_{x+1} - l_{x+2}\right)v^2 + \ldots + K\left(l_{x+n-1} - l_{x+n}\right)v^n =$$

$$= K\sum_{k=0}^{n-1}\left(l_{x+k} - l_{x+k+1}\right)v^{k+1} .$$

Výši pojistného lze následně stanovit jako

$$P = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}v^{k+1} .$$

Uvážíme-li vztah mezi jednotlivými veličinami v úmrtnostních tabulkách, můžeme psát

$$P = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}v^{k+1} = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d_{x+k}}{l_x}v^{k+1} = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{x+k}}{l_x}\frac{d_{x+k}}{l_{x+k}}v^{k+1} = K\sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} ,$$

nebo alternativně

$$P = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}v^{k+1} = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d_{x+k}v^{x+k+1}}{l_x v^x} = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_{x+k}}{D_x} = K\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} .$$

V případě pravděpodobnostního odvození definujeme posloupnost náhodných veličin *Výše plateb pojišťovny klientovi v daném roce* Z_k, kde k značí pořadové číslo roku, která pro $k = 1; \ldots; n$ nabývá hodnotu nula nebo jedna, přičemž pravděpodobnost se odhaduje pomocí hodnoty ${}_n p_x$, jednoznačně určené úmrtnostními tabulkami.

Střední hodnotu plateb pojišťovny klientovi lze zapsat jako

$$K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right)$$

a jednorázově placené nettopojistné se rovná

$$P = K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right) = K \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} Z_k \cdot v^k = K \cdot \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1}p_x \cdot q_{x+k-1} \cdot v^k = K \cdot \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} .$$

Převod na tvar využívající komutačních čísel se provede stejně jako v případě deterministického odvození.

V případě, že by doba trvání pojištění nebyla omezena, pro výši pojistného se triviálním způsobem získají vzorce

$$P = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{x+k}}{l_x} v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K \frac{M_x}{D_x} .$$

V pojistně-matematické literatuře se pro tyto veličiny vztažené k jednotkové pojistné částce ujalo označení

$$A^1_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}$$

respektive

$$A^1_x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} .$$

Dožití

Hledáme hodnotu nettopojistného, které by bylo třeba jednorázově zaplatit za pojištění pro případ dožití stanoveného okamžiku (přežití stanoveného počtu let) na pojistnou částku ve výši výši K, přičemž tato částka se vyplácí na konci pojištění (pokud je klient živ). Výši pojistného označíme symbolem P.

V případě deterministického odvození jednorázového nettopojistného pojištění pro případ dožití opět předpokládáme existenci skupiny l_x osob daných vlastností. Z těchto osob, v souladu s úmrtnostními tabulkami, se konce pojištění dožije l_{x+n} lidí. Počáteční hodnotu plateb všech klientů pojišťovně lze vyjádřit jako

$$P \cdot l_x ,$$

počáteční hodnotu plateb pojišťovny všem klientům lze vyjádřit jako

$$K \cdot l_{x+n} \cdot v^n .$$

Výši pojistného lze následně stanovit jako

$$P = K \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n .$$

Uvážíme-li vztah mezi jednotlivými veličinami v úmrtnostních tabulkách, můžeme psát

$$P = K \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = K \cdot {}_n p_x \cdot v^n ,$$

nebo alternativně

$$P = K \frac{l_{x+n}}{l_x} v^n = K \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = K \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

V případě pravděpodobnostního odvození definujeme posloupnost náhodných veličin *Výše plateb pojišťovny klientovi v daném roce* Z_k, kde k značí pořadové číslo roku, která pro $k = 1; \ldots; n-1$ nabývá hodnotu nula s pravděpodobností jedna, a pro $k = n$ může být rovna nule nebo jedné, přičemž pravděpodobnost se odhaduje pomocí hodnoty ${}_np_x$, jednoznačně určené úmrtnostními tabulkami.

Střední hodnotu plateb pojišťovny klientovi lze zapsat jako

$$K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right)$$

a jednorázově placené nettopojistné se rovná

$$P = K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right) = K \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}Z_k \cdot v^k = K \cdot \mathrm{E}Z_n \cdot v^n = K \cdot {}_n p_x \cdot v^n.$$

Převod na tvar využívající komutačních čísel se provede stejně jako v případě deterministického odvození.

V pojistně-matematické literatuře se pro tuto veličinu vztaženou k jednotkové pojistné částce nejčastěji používají označení

$$A_{x,\overline{n|}}^{\ \ 1} \equiv {}_n p_x \cdot v^n$$

nebo

$${}_nE_x \equiv {}_n p_x \cdot v^n.$$

První označení (novější) značně znepřehledňuje text (rozdíl mezi jednorázovým pojistným na smrt a na dožití je pouze ve vzdálenosti horního pravého indexu od hlavního znaku) a přináší typografické problémy, druhé označení (starší) odkatuje na pravděpodobnost dožití npx, avšak vzhledem k pojištění pro případ smrti odlišně klade indexy. Dále v textu proto bude používáno (kompromisní) označení

$$E_{x,\overline{n|}} \equiv {}_n p_x \cdot v^n.$$

Smrt nebo dožití

Protože toto pojištění vzniká složením pojištění pro případ smrti a pojištění pro případ dožití a protože smrt a dožití jsou dva vzájemně se vylučující jevy, pojistné se získá prostým součtem dvou výše uvedených veličin.

$$P = K \cdot A^1_{x,\overline{n|}} + K \cdot E_{x,\overline{n|}}.$$

Pro tuto veličinu vztaženou k jednotkové pojistné částce se v pojistně-matematické literatuře zavádí symbol $A_{x,\overline{n|}}$.

Důchod

Hledáme hodnotu nettopojistného, které by bylo třeba jednorázově zaplatit za pojištění, z něhož vzniká nárok na výplatu pravidelného důchodu ve výši D, přičemž tato částka se vyplácí na počátku každého (pojistného) roku (pokud je klient živ), nejdéle však po dobu n let. Výši pojistného označíme symbolem P.

V tomto okamžiku je nezbytné upozornit na jistou nelogičnost v diskutovaném pojištění, ne však v odvozované veličině:není rozumné zaplatit pojistné a témže okamžiku od pojišťovny obdržet první výplatu pojistného plnění.

V případě deterministického odvození jednorázového nettopojistného pojištění pro případ důchodu znovu předpokládáme existenci skupiny l_x osob daných vlastností. Z těchto osob, v souladu s úmrtnostními tabulkami, na počátku následujícího roku bude žít již pouze l_{x+1} lidí, na počátku dalšího roku l_{x+2} lidí a tak dále. Počáteční hodnotu plateb všech klientů pojišťovně lze vyjádřit jako

$$P \cdot l_x ,$$

počáteční hodnotu plateb pojišťovny všem klientům lze vyjádřit jako

$$D \cdot l_x + D \cdot l_{x+1} \cdot v + \dots + D \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1} =$$

$$= D \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} v^k .$$

Výši pojistného lze následně stanovit jako

$$P = D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k .$$

Uvážíme-li vztah mezi jednotlivými veličinami v úmrtnostních tabulkách, můžeme psát

$$P = D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = D \sum_{k=0}^{n-1} {}_p p_x \cdot v^k ,$$

nebo alternativně

$$P = D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k} \cdot v^{x+k}}{l_x \cdot v^x} = D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} .$$

V případě pravděpodobnostního odvození definujeme posloupnost náhodných veličin *Výše plateb pojišťovny klientovi v daném roce* Z_k, kde k značí pořadové číslo roku, která pro $k = 1; \dots; n$ nabývá hodnotu nula nebo jedna, přičemž pravděpodobnost se odhaduje pomocí hodnoty ${}_n p_x$, jednoznačně určené úmrtnostními tabulkami.

Střední hodnotu plateb pojišťovny klientovi lze zapsat jako

$$K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right)$$

a jednorázově placené nettopojistné se rovná

$$P = K \cdot \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot v^k \right) = K \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E} Z_k \cdot v^k = K \cdot \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1} p_x \cdot v^{k-1} = K \cdot \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot v^k .$$

Převod na tvar využívající komutačních čísel se provede stejně jako v případě deterministického odvození.

V případě, že by doba trvání pojištění nebyla omezena, pro výši pojistného se triviálním způsobem získají vzorce

$$P = D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{x+k}}{l_x} v^k = D \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^k = D \frac{N_x}{D_x} .$$

V pojistně-matematické literatuře se pro tyto veličiny vztažené k jednotkové pojistné částce ujalo označení

$$\ddot{a}_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot v^k$$

respektive

$$\ddot{a}_x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^k .$$

Nekonstantní smrt

V mnoha aplikacích se vyžaduje, aby výše pojistné částky pro případ smrti v průběhu pojištění nebyla konstantní, ale měnila se podle stanoveného pravidla. Nejčastějšími případy bývají lineární růst či pokles, tak zvaný anuitní pokles (pojistná částka sleduje nesplacenou výši jistiny úvěru spláceného anuitním způsobem) a geometrická změna (bez ohledu na to, dochází-li k růstu či poklesu pojistné částky, je podíl mezi hodnotami v bezprostředně následujících letech konstantní).

Protože základní diskuse probíhá stejně, jako v případě pojištění pro případ smrti s konstantní pojistnou částkou, lze pro pojištění s lineárně rostoucí pojistnou částkou, která je v okamžiku počátku pojištění rovna jedné n-tině, kde n je doba trvání pojištění, a v okamžiku konce pojištění rovna jedné, napsat

$$P = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \cdot v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{d_{x+k} \cdot v^{x+k+1}}{l_x \cdot v^x} =$$

$$= K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \frac{C_{x+k}}{D_x} = K \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{M_{x+k}}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} \right) = K \left(\frac{1}{n} \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} \right).$$

Stejným způsobem se zapíše hodnota jednorázového pojistného pro pojištění s lineárně klesající pojistnou částkou, která je v okamžiku počátku pojištění rovna jedné a v okamžiku konce pojištění rovna jedné n-tině, kde n je doba trvání pojištění, jako

$$P = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} \cdot v^{k+1} = K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{d_{x+k} \cdot v^{x+k+1}}{l_x \cdot v^x} =$$

$$= K \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \frac{C_{x+k}}{D_x} = K \left(\frac{M_x}{D_x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{M_{x+k+1}}{D_x} \right) = K \left(\frac{M_x}{D_x} - \frac{1}{n} \frac{R_{x+1} - R_{x+n+1}}{D_x} \right).$$

Anuitní pokles je úzce vázán na splátku úvěru. S jiným než měsíčním anuitním způsobem splácení úvěru se lze setkat pouze výjimečně, toto pojištění bude proto diskutováno až v souvislosti s měsíčním kalkulačním krokem.

Geometrickou změnu lze promítnout do technické úrokové míry a multiplikativní konstanty. Opět bez základní diskuse lze napsat

$$P = K \sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K \cdot x^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot \left(\frac{x}{1+i} \right)^{k+1} =$$

$$= K \cdot x^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1+i-x}{x}} \right)^{k+1} = K \cdot x^{-1} \cdot {}^{\frac{1+i-x}{x}}A_{x,n} = K \cdot x^{-1} \cdot \frac{{}^{\frac{1+i-x}{x}}M_x - {}^{\frac{1+i-x}{x}}M_{x+n}}{{}^{\frac{1+i-x}{x}}D_x} ,$$

přičemž levým horním indexem značíme technickou úrokovou míru dané veličiny.

V pojistně-matematické literatuře se veličiny lineárního růstu a lineárního poklesu vztažené k jednotkové pojistné částce ujalo označení

$$\left(IA\right)^1_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \, {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K\left(\frac{1}{n}\frac{R_x - R_{x+n}}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x}\right)$$

a

$$\left(DA\right)_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n} \, {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K\left(\frac{M_x}{D_x} - \frac{1}{n}\frac{R_{x+1} - R_{x+n+1}}{D_x}\right).$$

Lze se však setkat i s označením

$$\left(IA\right)^1_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left(k+1\right) {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K\,\frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

a

$$\left(DA\right)_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left(n-k\right) {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = K\left(\frac{n \cdot M_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x}\right).$$

Dále bývá zvykem značit

$$\left(IA\right)_{x,\overline{n}|} \equiv \left(IA\right)^1_{x,\overline{n}|} + E_{x,\overline{n}|}$$

či popřípadě

$$\left(IA\right)_{x,n} \equiv \left(IA\right)^1_{x,n} + n \cdot E_{x,n}.$$

Odložení pojistné ochrany

V případě pojištění pro případ smrti nebo pojištění vyplácení důchodu může být užitečné uvažovat možnost, kdy pojistná ochrana nezačíná bezprostředně po počátku pojištění (zaplacení nettopojistného), ale později. Hovoří se potom o takzvaných odložených pojištěních.

Opět bez základní diskuse uveďme po řadě vzorce pro pojištění pro případ smrti s omezenou a s neomezenou pojistnou ochranou odloženou o m let a pojištění vyplácení důchodu s omezenou a s neomezenou dobou vyplácení důchodu.

$${}_{m|}A^1_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=m}^{n+m-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = E_{x,m} \cdot A^1_{x+m,n} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$${}_{m|}A^1_x \equiv \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} = E_{x,m} \cdot A_{x+m} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_{x,\overline{n}|} \equiv \sum_{k=m}^{n+m-1} {}_k p_x \cdot v^k = E_{x,m} \cdot \ddot{a}_{x+m,n} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x \equiv \sum_{k=m}^{\infty} {}_k p_x \cdot v^k = E_{x,m} \cdot \ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

Další obdobné vzorce by bylo možno sestavit analogicky.

Nettopojistné základních běžně placených veličin

Doba placení pojistného

Pro pojištění s běžně (opakovaně) placeným pojistným je třeba zavést několik základních předpokladů.

Předně se – pro většinu případů z pohledu pojistné matematiky uměle – rozdělují pojištění podle délky doby placení pojistného: v případě, že se doba placení pojistného je shodná s dobou trvání pojištění, hovoří se o běžně placeném pojištění, bez přívlastků. Pokud je doba placení pojistného kratší než doba trvání pojištění, nazývá se tento případ pojištění se zkrácenou dobou placení pojistného.

Dále je třeba zdůraznit výši jednotlivých plateb. Ta je zpravidla po celou dobu placení konstantní. V případě, že by se měla měnit (podle předem známého vztahu), při odvození se postupuje analogicky.

Poslední předpoklad se týká okamžiků plateb pojistného. Zde budou uvažovány takové případy, ve kterých se pojistné platí vždy na počátku kalkulačního období (pokud k platbě dochází).

Způsob odvození

V případě pojištění s běžně placeným pojistným (bez ohledu na délku doby placení) lze postupovat analogicky jako v případě pojištění s jednorázově placeným pojistným. Jednodušeji se ale výsledek odvodí, pokud se využije ta skutečnost, že počáteční hodnota (jakýchkoli) plateb závisí na výši jednotlivých splátek, použité úrokové míře a použitých úmrtnostních tabulkách, ale nezávisí na osobách příjemce a plátce.

Smrt

Pojistné placené běžně po celou dobu trvání pojištění pro případ smrti na n let s pojistnou částkou K konstantní po celou dobu trvání je rovno

$$P = K\frac{A^1_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}|}} = K\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

V případě, že je toto pojištění placeno pouze po dobu m let (nejdéle však do smrti klienta), pojistné je rovno

$$P = K\frac{A^1_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}.$$

Pokud pojistná doba nebude omezena, výše pojistného bude

$$P = K\frac{A^1_{\overline{x}|}}{\ddot{a}_{\overline{x}|}} = K\frac{M_x}{N_x},$$

pokud bude i platba pojistného probíhat neomezeně až do úmrtí klienta, respektive

$$P = K\frac{A^1_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

v případě, že pojistné bude placeno pouze po dobu m let (nejdéle však do smrti klienta).

Obdobně sestavíme vzorce, které budou popisovat skutečnost s odloženou pojistnou ochranou.

Dožití

Pojistné placené běžně po celou dobu trvání pojištění pro případ dožití na n let s pojistnou částkou K je rovno

$$P = K\frac{E_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

pokud je doba placení pojistného rovna době trvání pojištění, respektive

$$P = K\frac{E_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

v případě, že pojistné bude placeno pouze po dobu m let (nejdéle však do smrti klienta).

Smrt nebo dožití

Pojistné pro případ smrti nebo dožití je opět součtem pojistného pojištění pro případ smrti a pojistného pro případ dožití. Pojistné se pak rovná

$$P = K\frac{A^1_{x,\overline{n}|} + E_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}},$$

pokud je doba placení pojistného shodná s dobou trvání pojištění, respektive

$$P = K\frac{A^1_{x,\overline{n}|} + E_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

pokud pojistné bude placeno pouze po dobu m let (nejdéle však do smrti klienta).

Dožití s výhradou vrácení pojistného

Výhrada vrácení pojistného často nahrazuje standardní risiko smrti na konstantní částku: v průběhu doby placení pojistného se vyplácí v případě úmrtí menší pojistné plnění, avšak pojistné je z tohoto důvodu levnější. Volí ho (pokud jim je nabídnuto) především ti klienti pojišťoven, kteří během pojistné doby nehodlají zemřít. Dlužno podotknout, že se vrací právě nominálně zaplacené pojistné, nikoli pojistné povýšené o úrok nebo ponížené o vynaložené správní náklady. Bývá zvykem uvažovat toto pojištění pouze pro případ, kdy pojistná doba a doba placení pojistného si jsou rovny.

Odvození vzorce pro výpočet pojistného potom vychází ze vztahu

$$P\ddot{a}_{x,\overline{n}|} = P \cdot n \cdot (IA)^1_{x,\overline{n}|} + K \cdot E_{x,\overline{n}|}$$

a pojistné je rovno

$$P = K \cdot \frac{E_{x,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{n}|} - n \cdot (IA)^1_{x,\overline{n}|}}$$

Odložený důchod

Protože situace, kdy klient dlouhodobě platí pojišťovně a zároveň od ní pobírá pojistné plnění je značně absurdní, v souvislosti s běžně placeným pojištěním důchodu se hovoří pouze o odloženém plnění. Následující vzorec předpokládá, že doba placení pojistného je m a doba vyplácení důchodu v po celou dobu konstantní výši D buď n, nejdéle však do smrti klienta (celková doba trvání pojištění je pak $m + n$), nebo není omezena (důchod je vyplácen doživotně). Případ, kdy mezi koncem doby placení pojistného a nápadem důchodu existuje prodleva, se odvodí analogicky.

Pojistné lze psát jako

$$P = D\frac{{}_{m|}\ddot{a}_{x+m,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = D\frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

respektive

$$P = D\frac{{}_{m|}\ddot{a}_{x+m}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}|}} = D\frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

Obdobně sestavíme vzorce, které budou popisovat skutečnost s odloženou pojistnou ochranou pro případ smrti.

Použití měsíčního kalkulačního kroku

Předpoklad výplaty pojistného plnění na konci (pojistného) roku, ve kterém došlo k pojistné události, popřípadě pojistné placené předelhůtně ročně neodpovídá zcela skutečnosti. Realitě více odpovídá použití měsíčního kalkulačního kroku, byť na druhé straně se v kratších jak ročních intervalech projevují sezónní vlivy úmrtnosti.

Praxe vyžaduje (byť mnohdy marně) zavedení měsíčního kalkulačního kroku v případech, kdy se měsíčně mění pojistná částka, tedy především v těch pojistných produktech, které mají vazbu na bankovní produkt.

Odvozování vzorců pro pojistné představuje hledání vyjádření vzorců s měsíčními kalkulacemi pomocí vzorců s ročními kalkulacemi. Pro področní úmrtnost se dále předpokládá platnost vztahu

$${}_{\frac{1}{12}}q_x = \frac{1}{12}\cdot q_x$$

který je ekvivalentní se vztahem

$${}_{\frac{h}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{h}{12}} = \frac{1}{12}\cdot q_x\,.$$

kde $0 < h < {}^{11}/_{12}$.

Pro kalkulaci všech pojištění se předpokládá, že k výplatě pojistného plnění v případě úmrtí klienta dochází na konci měsíce, v němž došlo k pojistné události. Tento předpoklad již lze brát jako velmi rozumný, neboť ač k pojistné události dochází „v průměru“ v polovině měsíce, je třeba procesně vyřešit veškeré skutečnosti kolem výplaty pojistného plnění. Pro výplatu pojistného plnění ve formě důchodu a pro pojistné se předpokládá splatnost předelhůtní měsíční, což dobře odpovídá většině pojistných podmínek.

Pro jednoduchost budou veškeré veličiny odvozovány pro jednotkovou pojistnou částku respektive jednotkový roční důchod (neboli měsíční důchod ve výši jedné dvanáctiny).

Smrt konstantní

Stejně jako v případě ročního kalkulačního kroku lze psát střední hodnotu plateb pojišťovny klientovi (a tedy jednorázově placené pojistné) jako

$$A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11} {}_{k+\frac{h}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+k+\frac{h}{12}} \cdot v^{k+\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}_{n+\frac{h}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+n+\frac{h}{12}} \cdot v^{n+\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11} \frac{1}{12}\, {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} \frac{1}{12}\, {}_n p_x \cdot q_{x+n} \cdot v^{n+\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^k \sum_{h=0}^{11} v^{\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} + \frac{1}{12}\, {}_n p_x \cdot q_{x+n} \cdot v^n \sum_{h=0}^{l-1} v^{\frac{h}{12}+\frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{1}{v}\left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1}\right)\left(\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{11} v^{\frac{h}{12}+\frac{1}{12}}\right) + \frac{1}{v}\left({}_n p_x \cdot q_{x+n} \cdot v^{n+1}\right)\left(\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1} v^{\frac{h}{12}+\frac{1}{12}}\right) =$$

$$= \frac{1}{v} \cdot a_{\overline{\frac{12}{12}}|} \cdot A^1_{x,\overline{n}|} + \frac{1}{v} \cdot a_{\overline{\frac{l}{12}}|} \cdot {}_{n|}A^1_{x,\overline{1}|}.$$

Ze vzorce je patrné, že výše pojistného není významně závislá na délce kalkulačního kroku. Z „přesného“ vyjádření lze odvodit přibližný vzorec,

$$A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} \doteq A^1_{x,\overline{n}|} + \frac{l}{12} \cdot {}_{n|}A^1_{x,\overline{1}|}.$$

Smrt anuitně klesající

Zde je zapotřebí označit další parametr výpočtu, úrokovou sazbu banky j, která je obecně jiná (vyšší, v odvození však není zapotřebí toto předpokládat) než technická úroková míra pojišťovny i. Předpokládá se, že $j > 0$. Tam, kde ze souvislosti není zřejmé ke kterému úroku jsou vztaženy příslušné finanční veličiny, budou označeny levím horním indexem i respektive j.

Dále se předpokládá, že úvěr je splácen (anuitním způsobem) v měsíčních intervalech polhůtně, a tedy výše jedné splátky klienta je rovna $\frac{1}{12}\frac{1}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}}$. Za předpokladu, že úvěr je (řádně) splácen již k let a h měsíců, bude výše nesplacené části jistiny vztažená k datu poslední učiněné splátky rovna hodnotě $\frac{{}^j a_{\overline{n-k+\frac{l-h}{12}}|}}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}}$.

V odvození se užije pomocný vztah

$$a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|} = \frac{1}{j^{(12)}}\left(1 - v^{n+\frac{l}{12}}\right)$$

respektive

$$a_{\overline{n-k+\frac{l-h}{12}}|} = \frac{1}{j^{(12)}}\left(1 - v^{n-k+\frac{l-h}{12}}\right).$$

Následně lze psát střední hodnotu plateb pojišťovny klientovi (a tedy jednorázově placené pojistné) jako

$$\left(AA\right)_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11} \frac{{}^j a_{\overline{n-k+\frac{l-h}{12}}|}}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \cdot {}_{k+\frac{h}{12}} p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}} q_{x+k+\frac{h}{12}} \cdot {}^i v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} \frac{{}^j a_{\overline{\frac{l-h}{12}}|}}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \cdot {}_{n+\frac{h}{12}} p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}} q_{x+n+\frac{h}{12}} \cdot {}^i v^{n+\frac{h+1}{12}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11} \frac{1}{j^{(12)}} \frac{\left(1 - {}^j v^{n-k+\frac{l-h}{12}}\right)}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \cdot \frac{1}{12} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^i v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} \frac{1}{j^{(12)}} \frac{\left(1 - {}^j v^{\frac{l-h}{12}}\right)}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \cdot \frac{1}{12} \cdot {}_n p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^i v^{n+\frac{h+1}{12}} =$$

$$= \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^j a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \frac{1}{12} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11}\left(1 - {}^j v^{n-k+\frac{l-h}{12}}\right) \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^i v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1}\left(1 - {}^j v^{\frac{l-h}{12}}\right) \cdot {}_n p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^i v^{n+\frac{h+1}{12}}\right] =$$

$$= \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \frac{1}{12} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{11} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^{i}v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}_{n}p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^{i}v^{n+\frac{h+1}{12}} \right] -$$

$$- \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \frac{1}{12} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{11} {}^{j}v^{n-k+\frac{l-h}{12}} \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^{i}v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}^{j}v^{\frac{l-h}{12}} \cdot {}_{n}p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^{i}v^{n+\frac{h+1}{12}} \right] =$$

$$= \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} -$$

$$- \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \frac{1}{12} {}^{j}v^{n+\frac{l}{12}+\frac{1}{12}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{11} {}^{j}v^{-\left(k+\frac{h+1}{12}\right)} \cdot {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^{i}v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}^{j}v^{-\left(n+\frac{h+1}{12}\right)} \cdot {}_{n}p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^{i}v^{n+\frac{h+1}{12}} \right] =$$

$$= \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \left\{ A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} - \frac{1}{12} {}^{j}v^{n+\frac{l}{12}+\frac{1}{12}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{11} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot \frac{{}^{i}v^{k+\frac{h+1}{12}}}{{}^{j}v^{k+\frac{h+1}{12}}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}_{n}p_x \cdot q_{x+n} \cdot \frac{{}^{i}v^{n+\frac{h+1}{12}}}{{}^{j}v^{n+\frac{h+1}{12}}} \right] \right\}$$

Na tomto místě se přistoupí k substituci $\frac{{}^{i}v^{k+\frac{h+1}{12}}}{{}^{j}v^{k+\frac{h+1}{12}}} = {}^{z}v^{k+\frac{h+1}{12}}$, z níž ihned plyne $\frac{{}^{i}v}{{}^{j}v} = {}^{z}v$ neboli $\frac{1+i}{1+j} = 1+z$ a tedy $z = \frac{i-j}{1+j}$. Je pozoru hodné, že pomocná úroková sazba z bude v praxi záporná.

$$\ldots = \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \left\{ A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} - \frac{1}{12} {}^{j}v^{n+\frac{l}{12}+\frac{1}{12}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{11} {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \cdot {}^{z}v^{k+\frac{h+1}{12}} + \sum_{h=0}^{l-1} {}_{n}p_x \cdot q_{x+n} \cdot {}^{z}v^{k+\frac{h+1}{12}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{j^{(12)}} \frac{1}{{}^{j}a_{\overline{n+\frac{l}{12}}|}} \left({}^{i}A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} - {}^{j}v^{n+\frac{l}{12}+\frac{1}{12}} \cdot {}^{z}A^1_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} \right).$$

Je překvapivé, že hodnotu jednorázově placeného pojistného s měsíčním kalkulačním krokem a měsíčním poklesem pojistné částky anuitním způsobem lze vyjádřit jako rozdíl dvou jednorázových pojistných s konstantní pojistnou částkou, vynásobených vhodnými koeficienty.

Dožití

Na rozdíl od pojištění pro případ smrti v tomto případě měsíční kalkulační krok rozšiřuje pouze možnost v době trvání pojištění.

Naprosto stejně jako v případě ročního kalkulačního kroku lze psát

$$E_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|} = {}_{n+\frac{l}{12}}p_x \cdot v^{n+\frac{l}{12}} =$$

$$= {}_{\frac{l}{12}}p_{x+n} \cdot {}_{n}p_x \cdot v^n \cdot v^{\frac{l}{12}} =$$

$$= \left(1 - \frac{l}{12} + \frac{l}{12} \cdot p_{x+n}\right) \cdot {}_{n}p_x \cdot v^n \cdot v^{\frac{l}{12}} =$$

$$= \left(1 - \frac{l}{12}\right) \cdot v^{\frac{l}{12}} \cdot {}_{n}p_x \cdot v^n + \frac{l}{12} \cdot v^{\frac{l}{12}-1} \cdot {}_{n+1}p_x \cdot v^{n+1} =$$

$$=\left(1-\frac{l}{12}\right)\cdot v^{\frac{l}{12}}\cdot E_{x,\overline{n}|}+\frac{l}{12}\cdot v^{\frac{l}{12}-1}\cdot E_{x,\overline{n+1}|}.$$

Hodnota pojistného pro pojištění trvající ne celý počet let je tedy rovna lineární kombinaci pojistného pro pojištění na největší menší celý počet let a nejmenší větší celý počet let, přičemž multiplikativní koeficienty jsou závislé pouze na poloze okamžiku konce pojištění vzhledem ke kombinujícím se bodům a na technické úrokové míře. Jejich podoba je nadmíru elegantní.

Jelikož hodnota koeficientu v je blízká jedné, lze psát přibližný vzorec ve tvaru

$$=\left(1-\frac{l}{12}\right)\cdot E_{x,\overline{n}|}+\frac{l}{12}\cdot E_{x,\overline{n+1}|}.$$

Důchod

Pro kalkulaci tohoto důchodu se předpokládá, že k jeho výplatě dochází na počátku každého měsíce po celou dobu trvání vyplácení důchodu (předelhůtné vyplácení). Předpokládáme, že populace se chová podle příslušných speciálních úmrtnostních tabulek, úmrtnost je v roce lineární.

Nejprve je třeba odvodit pomocné vztahy pro počáteční hodnotu důchodu placeného po dobu jednoro roku respektive po dobu kratší jednoho roku. Platí

$$\ddot{a}_{x,\overline{\frac{12}{12}}|}=\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{11}{}_{\frac{h}{12}}p_x\cdot v^{\frac{h}{12}}=\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{11}\left({}_{\frac{h}{12}}p_x\cdot{}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{h}{12}}\cdot\sum_{b=0}^{h}v^{\frac{b}{12}}\right)+p_x\cdot\sum_{b=0}^{11}v^{\frac{b}{12}}=$$

$$=q_x\cdot\frac{1}{144}\sum_{h=0}^{11}\sum_{b=0}^{h}v^{\frac{b}{12}}+p_x\cdot\sum_{b=0}^{11}v^{\frac{b}{12}}=q_x\cdot\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{12}{12}}|}+p_x\cdot\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}=\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}-q_x\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{12}{12}}|}\right)$$

a

$$\ddot{a}_{x,\overline{\frac{l}{12}}|}=\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1}{}_{\frac{h}{12}}p_x\cdot v^{\frac{h}{12}}=\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1}\left({}_{\frac{h}{12}}p_x\cdot{}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{h}{12}}\cdot\sum_{b=0}^{h}v^{\frac{b}{12}}\right)+{}_{\frac{l}{12}}p_x\cdot\sum_{b=0}^{l}v^{\frac{b}{12}}=$$

$$=q_x\cdot\frac{1}{144}\sum_{h=0}^{l}\sum_{b=0}^{h}v^{\frac{b}{12}}+{}_{\frac{l}{12}}p_x\cdot\sum_{b=0}^{l}v^{\frac{b}{12}}=q_x\cdot\frac{l}{12}\cdot\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{l}{12}}|}+{}_{\frac{l}{12}}p_x\cdot\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}=\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}-q_x\cdot\frac{l}{12}\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{l}{12}}|}\right).$$

Následně lze přistoupit k samotnému odvození. Lze psát

$$\ddot{a}_{x,\overline{n+\frac{l}{12}}|}=\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11}{}_{k+\frac{h}{12}}p_x\cdot v^{k+\frac{h}{12}}+\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1}{}_{n+\frac{h}{12}}p_x\cdot v^{n+\frac{h}{12}}=$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{11}{}_{\frac{h}{12}}p_{x+k}\cdot{}_kp_x\cdot v^{k+\frac{h}{12}}+\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1}{}_{\frac{h}{12}}p_{x+n}\cdot{}_np_x\cdot v^{n+\frac{h}{12}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[{}_kp_x\cdot v^k\left(\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{11}{}_{\frac{h}{12}}p_{x+k}\cdot v^{\frac{h}{12}}\right)\right]+{}_np_x\cdot v^n\left(\frac{1}{12}\sum_{h=0}^{l-1}{}_{\frac{h}{12}}p_{x+n}\cdot v^{\frac{h}{12}}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{{}_kp_x\cdot v^k\left[\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}-q_x\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{12}{12}}|}\right)\right]\right\}+{}_np_x\cdot v^n\left[\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}-q_x\cdot\frac{l}{12}\cdot\left(\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{l}{12}}|}\right)\right]=$$

$$=\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}\sum_{k=0}^{n-1}{}_kp_x\cdot v^k-\frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{12}{12}}|}}{v}\sum_{k=0}^{n-1}{}_kp_x\cdot q_x\cdot v^{k+1}+\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}\cdot{}_np_x\cdot v^n-\frac{l}{12}\cdot\frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|}-\left(d\ddot{a}\right)_{\overline{\frac{l}{12}}|}}{v}\cdot{}_np_x\cdot q_x\cdot v^{n+1}=$$

$$= \ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|} \cdot \ddot{a}_{x,\overline{n}|} - \frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|} - (d\ddot{a})_{\overline{\frac{12}{12}}|}}{v} \cdot A^{1}_{x,\overline{n}|} + \ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|} \cdot {}_{n|}\ddot{a}_{x,\overline{1}|} - \frac{l}{12} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|} - (d\ddot{a})_{\overline{\frac{l}{12}}|}}{v} \cdot {}_{n|}A^{1}_{x,\overline{1}|} =$$

$$= \left(\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|} \cdot \ddot{a}_{x,\overline{n}|} + \ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|} \cdot {}_{n|}\ddot{a}_{x,\overline{1}|} \right) - \left(\frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{12}{12}}|} - (d\ddot{a})_{\overline{\frac{12}{12}}|}}{v} \cdot A^{1}_{x,\overline{n}|} + \frac{l}{12} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{\frac{l}{12}}|} - (d\ddot{a})_{\overline{\frac{l}{12}}|}}{v} \cdot {}_{n|}A^{1}_{x,\overline{1}|} \right).$$

Přechod mezi důchodem kalkulovaným a vypláceným ročně na důchod kalkulovaný a vyplácený měsíčně lze interpretovat jako (multiplikativní) opravu vzhledem k úročení a (aditivní) korekci vzhledem k úmrtnosti. Přibližný vzorec pro výpočet počáteční hodnoty důchodu by potom měl tvar

$$\ddot{a}_{x,n+\frac{l}{12}} = \left(\ddot{a}_{x,n} + \frac{l}{12} \, {}_{n|}\ddot{a}_{x,1} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot A^{1}_{x,n} + \frac{l^2}{144} \cdot {}_{n|}A^{1}_{x,1} \right).$$

Pojištění s běžně placeným pojistným

Výše běžně placeného pojistného se odvodí naprosto stejným způsobem jako v případě modelů s ročním kalkulačník krokem.

Ostatní

Více úmrtnostních tabulek v jedné sazbě

V některých pojistně-technických kalkulací se užívá několik úmrtnostních tabulek. Způsoby, jak v sazbě použít více než jednu úmrtnostní tabulku, jsou v zásadě dva: buď se použije časové hledisko a pro prvních m_1 let se použijí první úmrtnostní tabulky, podalších m_2 let se použijí druhé úmrtnostní tabulky a podobně, nebo se použije risikové hledisko a bez ohledu věk se používají tabulky příslušné danému risiku.

Typickým představitelem první skupiny sazeb je důchodové pojištění: po dobu placení pojistného pojišťovny používají úmrtnostní tabulky s nadhodnoceným risikem smrti a po dobu vyplácení důchodu používají úmrtnostní tabulky s nadhodnoceným risikem dožití. Příkladem vzorce pro výpočet pojistného může být pojištění výplaty doživotního důchodu s běžně placeným pojistným

$$P = \frac{{}^{Q_s}_{n|}\ddot{a}_x}{{}^{Q_d}\ddot{a}_{x,\overline{n}|}},$$

kde levý horní index Q_s respektive Q_d značí výpočet veličiny s použitím úmrtnostních tabulek s nadhodnoceným risikem smrti respektive dožití.

Typickým představitelem druhé skupiny sazeb je dětské pojištění, ve kterém jsou oba rodiče pojištění ve prospěch dítěte, přičemž pojistné plnění se poskytuje jak v případě úmrtí matky tak v případě úmrtí otce, pokud zemřou oba pojištění, pojistně plnění se poskytuje dvakrát. Příkladem může být pojištění smrti rodičů s jednorázově placeným pojistným

$$P = {}^{Q_m}A^{1}_{x,n} + {}^{Q_ž}A^{1}_{x,n},$$

kde levý horní index Q_m respektive $Q_ž$ značí výpočet veličiny s použitím úmrtnostních tabulek pro muže respektive pro ženy.